



Sur la 2-extension maximale non ramifiée de la \mathbf{Z}_2 -extension cyclotomique de certains corps quadratiques

Ali MOUHIB

Abstract

Soient ℓ et ℓ' deux nombres premiers distincts, $k = \mathbf{Q}(\sqrt{\ell\ell'})$ et k_∞ la \mathbf{Z}_2 -extension cyclotomique de k . Soient \mathcal{L}_∞ la 2-extension maximale non ramifiée sur k_∞ et L_∞ la sous-extension abélienne maximale de $\mathcal{L}_\infty/k_\infty$. Sous certaines conditions sur les premiers ℓ et ℓ' , nous étudions la structure des groupes de Galois $Gal(L_\infty/k_\infty)$ et $Gal(\mathcal{L}_\infty/k_\infty)$.

1 Introduction

Soient p un nombre premier et \mathbf{Z}_p -l'anneau des entiers p -adiques. Soient k un corps de nombres et k_∞ une \mathbf{Z}_p extension de k . Notons \mathcal{L}_∞ la p -extension maximale non ramifiée sur k_∞ et L_∞ la sous-extension abélienne maximale de $\mathcal{L}_\infty/k_\infty$.

Pour tout entier naturel n , notons A_n le p -groupe de classe du n -ième étage k_n de k_∞ . Le théorème fondamental d'Iwasawa sur les ordres des A_n s'énonce comme suit : il existe des entiers $\lambda, \mu \geq 0$ et ν appelés invariants d'Iwasawa tels que pour n assez grand, on a

$$|A_n| = p^{\lambda n + \mu p^n + \nu}.$$

Il est bien connu que pour n assez grand A_n se surjecte dans A_{n-1} via l'application norme. On définit, ainsi la limite projective des A_n suivant ces

Key Words: Iwasawa theory, Quadratic extensions
2010 Mathematics Subject Classification: Primary:11R23 Secondary:11R11
Received: July, 2013.
Accepted: November, 2013.

applications normes et on pose $X_\infty := \varprojlim A_n \simeq \text{Gal}(L_\infty/k_\infty)$. On vérifie ainsi que

$$\lambda = \mu = 0 \text{ si et seulement si } X_\infty \text{ est fini .}$$

A noter que si k est abélien et k_∞ est cyclotomique, alors $\mu = 0$ [4]. Si k est totalement réel, la conjecture de Greenberg précise la nullité des invariants λ et μ [5].

Plusieurs travaux ont été consacré à l'étude de la conjecture de Greenberg pour la \mathbf{Z}_2 -extension cyclotomique des corps quadratiques réels. Nous citons quelques travaux qui nous intéressent concernant l'invariant λ d'Iwasawa de la \mathbf{Z}_2 -extension cyclotomique des corps quadratiques réels $\mathbf{Q}(\sqrt{\ell\ell'})$ où ℓ et ℓ' désignent des premiers impairs distincts :

Dans [12], les auteurs ont déterminé une liste de corps quadratiques réels k tels que $X_\infty(k)$ est fini. En particulier, ils ont démontré le résultat suivant :

Théorème 1.1. Soit $k = \mathbf{Q}(\sqrt{\ell\ell'})$ où ℓ et ℓ' sont deux nombres premiers tels que $\ell \equiv 5 \pmod{8}$ et $\ell' \equiv -1 \pmod{4}$, alors l'invariant $\lambda(k)$ d'Iwasawa de k est nul.

T. Fukuda et K. Komatsu ont amélioré le théorème précédent ([3], Theorem 2.2):

Théorème 1.2. Soit $k = \mathbf{Q}(\sqrt{\ell\ell'})$ où ℓ et ℓ' sont deux nombres premiers tels que $\ell \equiv 1 \pmod{8}$, $\ell' \equiv 3 \pmod{8}$, $\left(\frac{\ell}{\ell'}\right) = -1$ et $2^{\frac{\ell-1}{4}} \not\equiv 1 \pmod{\ell}$. Alors l'invariant λ d'Iwasawa de k est nul.

Remarque 1.3 Le symbole biquadratique $\left(\frac{2}{\ell}\right)_4$ est défini par $\left(\frac{2}{\ell}\right)_4 \equiv 2^{\frac{\ell-1}{4}} \pmod{\ell}$. Ainsi, l'inéquivalence $2^{\frac{\ell-1}{4}} \not\equiv 1 \pmod{\ell}$ peut s'écrire sous la forme $\left(\frac{2}{\ell}\right)_4 = -1$. Dans ce travail, on s'intéresse à la structure des groupes

$\text{Gal}(\text{Gal}(L_\infty/k_\infty))$ et $\text{Gal}(\mathcal{L}_\infty/k_\infty)$ pour la famille des corps quadratiques réels $\mathbf{Q}(\sqrt{\ell\ell'})$ où ℓ et ℓ' désignent des premiers impairs distincts. Nous démontrons ainsi les résultats suivants :

Théorème 1.4. Soit $k = \mathbf{Q}(\sqrt{\ell\ell'})$ où ℓ et ℓ' sont deux nombres premiers tels que $\ell \equiv 1 \pmod{8}$, $\ell' \equiv -1 \pmod{4}$ et $\left(\frac{\ell}{\ell'}\right) = -1$, alors $X_\infty(k) \simeq \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$, si l'une des conditions suivantes est vérifiée :

(a) $\left(\frac{2}{\ell}\right)_4 = -1$ et $\left(\frac{2}{\ell'}\right) = -1$,

(b) $\left(\frac{2}{\ell}\right)_4 = -1$ et $\ell \equiv 9 \pmod{16}$,

(c) $\left(\frac{2}{\ell}\right)_4 = 1$, $\ell \equiv 9 \pmod{16}$ et $\left(\frac{2}{\ell'}\right) = 1$.

Théorème 1.5. Soit k comme dans l'énoncé du théorème précédent. Si l'une des conditions (a), (b) ou (c) est vérifiée, alors le groupe $Gal(\mathcal{L}_\infty/k_\infty)$ est métacyclique fini, précisément, abélien, quaternionique ou diédral. Si de plus $\left(\frac{2}{\ell}\right)_4 \neq (-1)^{\frac{\ell-1}{8}}$, alors $Gal(\mathcal{L}_\infty/k_\infty)$ est abélien ; particulièrement pour le cas (c), $Gal(\mathcal{L}_\infty/k_\infty)$ est abélien.

Notons que dans [9], nous avons étudié la structure du groupe de Galois $Gal(\mathcal{L}_\infty/k_\infty)$ pour une autre famille de corps quadratiques réels.

2 Remarques sur l'invariant λ d'Iwasawa

Pour démontrer les deux théorèmes 1.4 et 1.5, nous aurons besoin de la proposition suivante qui donne une condition suffisante sur la finitude du module d'Iwasawa abélien non ramifié $X'_\infty := Gal(L'_\infty/k_\infty)$ où L'_∞ est la sous-extension de L_∞/k_∞ où toutes les places p -adiques de k_∞ se décomposent totalement.

Notons pour tout entier naturel n , L'_n la sous-extension de L_n/k_n où toutes les places p -adiques de k_n se décomposent totalement. On a bien $L'_\infty = \cup_n L'_n$ et $A'_n \simeq Gal(L'_n/k_n)$, où A'_n désigne le p -groupe des p -classes de k_n .

Soit γ un générateur topologique de $Gal(k_\infty/k)$. On sait que γ agit par conjugaison sur X_∞ et sur X'_∞ . Par la correspondance $\gamma - 1 \longleftrightarrow T$, il est bien connu d'après ([7], Theorem 5, Theorem 8) que X_∞, X'_∞ sont des $\Lambda := \mathbf{Z}_p[[T]]$ -modules de types finis.

Soient m et n deux entiers naturels tels que $m \geq n \geq 0$, $w_n = (1+T)^{p^n} - 1$ et $\nu_{n,m} = \frac{w_m}{w_n}$. Notons par $Y' = Gal(L'_\infty/k_\infty L'_{n_0})$. On a le diagramme commutatif suivant [7]:

$$\begin{array}{ccc}
A'_m & \xrightarrow{\simeq} & X'_\infty/\nu_{n_0,m}Y' \\
\downarrow & & \downarrow \\
A'_n & \xrightarrow{\simeq} & X'_\infty/\nu_{n_0,n}Y'
\end{array}$$

Il est bien connu d'après ([2], Theorem 1), que s'il existe un entier naturel $n \geq n_0$ tel que $|A_n| = |A_{n+1}|$, alors pour tout entier naturel $m \geq n$, on a $|A_m| = |A_n|$.

Nous démontrons un résultat similaire au theorem 1 de [2] pour les groupes A'_n :

Proposition 2.1. Supposons qu'il existe un entier naturel $n \geq n_0$ tel que $|A'_n| = |A'_{n+1}|$, alors pour tout entier naturel $m \geq n$, on a $|A'_m| = |A'_n|$. Précisément, on a $X'_\infty \simeq A'_n$.

Preuve : Supposons qu'il existe un entier naturel $n \geq n_0$ tel que $|A'_n| = |A'_{n+1}|$, alors de la commutativité du diagramme précédent, l'isomorphisme $A'_{n+1} \rightarrow A'_n$ entraîne l'isomorphisme $X'_\infty/\nu_{n_0,n+1}Y' \rightarrow X'_\infty/\nu_{n_0,n}Y'$. Alors $\nu_{n_0,n+1}Y' = \nu_{n_0,n}Y'$. Ce qui implique que $\nu_{n,n+1}\nu_{n_0,n}Y' = \nu_{n_0,n}Y'$. D'autre part, comme $\nu_{n,n+1}$ est contenu dans l'unique idéal maximal de Λ engendré par p et T et que $\nu_{n_0,n}Y'$ est un Λ -module de type fini, alors par application du lemme de Nakayama, on trouve que $\nu_{n_0,n}Y' = 0$ et donc $X'_\infty \simeq A'_n$. Dans [7], les invariants d'Iwasawa liés à l'extension L'_n/k_n notés $\lambda', \mu' \geq 0$ et ν' sont tels que pour n assez grand, on a $|A'_n| = p^{\lambda'n + \mu'n + \nu'}$. Notons que $A'_n \simeq Gal(L'_n/k_n)$ et que X'_∞ est fini si et seulement si $\lambda' = \mu' = 0$.

En supposant que toutes les places p -adiques sont ramifiées dans k_∞/k (cette hypothèse est vérifiée par exemple dans le cas où k_∞ est la \mathbf{Z}_p -extension cyclotomique de k). On a $rang_{\mathbf{Z}_p}(Gal(L_\infty/L'_\infty)) \leq s$ où s est le nombre des places p -adiques de k_∞ .

On a

$$\lambda - s \leq \lambda' \leq \lambda \text{ et } \mu = \mu',$$

où

$$rang_{\mathbf{Z}_p}(Gal(L_\infty/k_\infty)) = \lambda \text{ et } rang_{\mathbf{Z}_p}(Gal(L'_\infty/k_\infty)) = \lambda'.$$

Dans le cas où il existe une seule place p -adique dans k_∞ , alors d'après l'inégalité précédente, on a $\lambda' = 0$ entraîne $\lambda \leq 1$. Dans la proposition qui suit, nous donnons une condition permettant de voir la nullité de λ .

Proposition 2.2. Soit k un corps de nombres, p un nombre premier et k_∞ une \mathbf{Z}_p -extension de k . Supposons qu'un seul premier de k est au dessus de p et que ce premier est totalement ramifié dans k_∞ . Alors $\lambda = \mu = 0$ si et seulement si $\lambda' = \mu' = 0$.

Preuve :

L'implication $\lambda = \mu = 0$ entraîne $\lambda' = \mu' = 0$ est triviale. Démontrons la réciproque.

Il est bien connu que la place p -adique de l'étage \mathbf{Q}_n de la \mathbf{Z}_p -extension cyclotomique de \mathbf{Q} est triviale et il n'est pas difficile de voir que l'ordre de la classe de la place p -adique de k_n est égal à $\frac{|A_n|}{|A'_n|}$ qui divise à son tour $[k : \mathbf{Q}]$. Or par hypothèse $|A'_n|$ est borné, lorsque n tend vers l'infini. Il s'ensuit que $\frac{|A_n|}{|A'_n|}$ est borné lorsque n tend vers l'infini. Ce qui démontre la proposition.

Remarques :

(i) Notons que dans le cas où p est impair et que k est abélien sur \mathbf{Q} , on a pour tout $n \geq n_0$, $A_n = A'_n$ ([10], Lemma 1.5). Ce qui démontre la proposition, dans ce cas.

(ii) Dans le cas où p est un nombre premier impair et que tous les étages k_n vérifient la conjecture de Leopoldt, alors $\lambda' = \mu' = 0$ entraîne $\lambda = \mu = 0$ [11].

3 Preuves des théorèmes 1.4 et 1.5

Dans toute la suite ℓ et ℓ' désignent des nombres premiers tels que $\ell \equiv -\ell' \equiv 1 \pmod{4}$ et $\left(\frac{2}{\ell}\right) = -\left(\frac{\ell}{\ell'}\right) = 1$ et $k = \mathbf{Q}(\sqrt{\ell\ell'})$.

Notons que le 2-groupe de classes de k est cyclique d'ordre 2 [13] et que le 2-groupe de classes de $k_1 = \mathbf{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{\ell\ell'})$ est de type $(2, 2)$ [1]. Comme $\left(\frac{2}{\ell}\right) = 1$, alors la place 2-adique de k se décompose dans le 2-corps de classes de Hilbert $L_0 = \mathbf{Q}(\sqrt{\ell}, \sqrt{\ell'})$ de k , par suite $|A_0| = |A'_0| = 2$.

Preuve du théorème 1.4 :

Pour les trois cas du théorème 1.4, on va démontrer que $|A'_0| = |A'_1| = 2$ et

ensuite, on applique les propositions 2.1 et 2.2.

On a 2 se ramifie totalement dans $k_1 = \mathbf{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{\ell\ell'})$. Notons \mathcal{P} la place 2-adique de k_1 . Pour démontrer que $|A'_1| = 2$, il suffit de démontrer que \mathcal{P} n'est pas principal.

On a $N_{k_1/\mathbf{Q}(\sqrt{2})}(\mathcal{P}) = \sqrt{2}o_{\mathbf{Q}(\sqrt{2})}$ où $o_{\mathbf{Q}(\sqrt{2})}$ désigne l'anneau des entiers de $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$. Supposons que \mathcal{P} est principal, alors il existe une unité u de $\mathbf{Q}_1 = \mathbf{Q}(\sqrt{2})$ telle que $u\sqrt{2}$ est norme dans l'extension k_1/\mathbf{Q}_1 . Ce qui est impossible, si la condition (a), (b) ou (c) du théorème 3.4 est satisfaite. En effet :

Soit \mathcal{Q} une place de $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$ ramifiée dans l'extension $k_1/\mathbf{Q}(\sqrt{2})$ et soit le générateur de $Gal(\mathbf{Q}_1/\mathbf{Q})$. Supposons que \mathcal{Q} est au dessus de ℓ , alors par un calcul sur le symbole du reste normique, nous démontrons que :

$$\left(\frac{\pm\sqrt{2}, \ell\ell'}{\mathcal{Q}} \right) = \left(\frac{2}{\ell} \right)_4. \quad (1)$$

$$\left(\frac{\pm\epsilon\sqrt{2}, \ell\ell'}{\mathcal{Q}} \right) = \begin{cases} 1 & \text{si } \ell \equiv 1 \pmod{16}, \\ -1 & \text{si } \ell \equiv 9 \pmod{16}, \end{cases} \quad (2)$$

où $\epsilon = 1 + \sqrt{2}$ désigne l'unité fondamentale de $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$.

Supposons que \mathcal{Q} est au dessus de ℓ' , alors dans le cas où $\left(\frac{2}{\ell'}\right) = -1$, on trouve que

$$\left(\frac{\pm\epsilon\sqrt{2}, \ell\ell'}{\mathcal{Q}} \right) = -1, \quad (3)$$

et dans le cas où $\left(\frac{2}{\ell'}\right) = 1$, on a

$$\left(\frac{\pm\epsilon\sqrt{2}, \ell\ell'}{\mathcal{Q}} \right) \left(\frac{\pm\epsilon\sqrt{2}, \ell\ell'}{\sigma(\mathcal{Q})} \right) = 1. \quad (4)$$

Ainsi, si l'une des conditions (a), (b) ou (c) du théorème 3.4 est satisfaite, alors en combinant entre les équations (1), (2), (3) et (4), on trouve que pour toute unité u de \mathbf{Q}_1 , $u\sqrt{2}$ n'est pas norme dans k_1/\mathbf{Q}_1 . Par suite, \mathcal{P} n'est pas principal et comme $|A_1| = 2$, alors $L'_1 = L_0k_1$ et $|A'_0| = |A'_1| = 2$. Moyennant les propositions 3.6 et 3.7, nous avons $\lambda(k) = \mu(k) = 0$. D'autre part, la place 2-adique de k_n est ramifiée dans l'extension k_n/\mathbf{Q}_n . Or, le groupe de classes de \mathbf{Q}_n est trivial, alors la place 2-adique de k_n est d'ordre égal à 2. Il s'ensuit que pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a $A(k_n) \simeq \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$, d'où le théorème 3.4.

Preuve du théorème 1.5 :

Plaçons nous dans l'une des conditions du théorème 1.4. Montrons pour le

moment que $Gal(\mathcal{L}_\infty/k_\infty)$ est fini. Il est clair que $Gal(\mathcal{L}_\infty/L_\infty)$ est le commutateur de $Gal(\mathcal{L}_\infty/k_\infty)$ et on a $Gal(\mathcal{L}_\infty/k_\infty)/Gal(\mathcal{L}_\infty/L_\infty) \simeq \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$. Remarquons que pour tout entier $n \geq 1$, la place 2-adique \mathcal{P}_n de k_n se décompose dans L'_n . D'autre part, il existe une seule place 2-adique dans la \mathbf{Z}_2 -extension cyclotomique de $\mathbf{Q}(\sqrt{\ell'})$. Comme le nombre de classes de $\mathbf{Q}(\sqrt{\ell'})$ est impair, alors tous les étages $\mathbf{Q}_n(\sqrt{\ell'})$ de $\mathbf{Q}(\sqrt{\ell'})$ sont de nombre de classes impair. Ce qui entraîne que la place 2-adique de $\mathbf{Q}_n(\sqrt{\ell'})$ reste principale en se décomposant dans L'_n . Par conséquent, la place 2-adique de k_n capitule en se décomposant dans L'_n . En appliquant ([8], Theorem 2), on a bien $A(L'_n)$ est cyclique. D'autre part, le groupe $Gal(L'_\infty/L'_1)$ laisse $A(L'_n)$ fixe, et d'après [G, proposition 1], $|A(L'_n)|$ est borné lorsque n tend vers l'infini, il s'ensuit que $X_\infty(L'_n)$ est cyclique d'ordre fini. Ainsi, le groupe $Gal(\mathcal{L}_\infty/k_\infty)$ est métacyclique d'ordre fini. De plus, d'après ([6], Chap. 5, Theorem 4.5), le groupe $Gal(\mathcal{L}_\infty/k_\infty)$ est abélien, quaternionique, diédral ou semi-diédral. Comme la place 2-adique de k_n capitule en se décomposant dans L'_n , alors d'après ([8], Theorem 2), L'_n/k_n est de type (A), ainsi $Gal(\mathcal{L}_\infty/k_\infty)$ ne peut jamais être semi-diédral.

Pour finir la preuve du théorème, on va démontrer que dans le cas où $(\frac{2}{\ell})_4 \neq (-1)^{\frac{\ell-1}{8}}$, on a $Gal(\mathcal{L}_\infty/k_\infty)$ est abélien. Il est clair que les places 2-adiques de $\mathbf{Q}_n(\sqrt{\ell})$ se ramifient dans L'_n . D'autre part, d'après [12], $X_\infty(\mathbf{Q}(\sqrt{\ell})) = 0$, ce qui entraîne que le nombre de classes de chaque étage $\mathbf{Q}_n(\sqrt{\ell})$ est impair. Or $L'_n/\mathbf{Q}_n(\sqrt{\ell})$ est une extension quadratique ramifiée en les places 2-adiques, alors les places 2-adiques de L'_n sont d'ordres divisibles par 2, donc d'ordres égal à 2. Par conséquent, on a $Gal(\mathcal{L}_\infty/k_\infty) \simeq \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$.

Acknowledgement. The publication of this article is partially supported by the Grant of Romanian National Authority for Scientific Research CNCS-UEFISCDI, Project No. PN-II-ID-WE-2012-4-161.

References

- [1] A. Azizi, A. Mouhib, *Capitulation des 2-classes d'idéaux de $\mathbf{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{d})$ où d est un entier naturel sans facteurs carrés*, Acta Arith. 109, no 1, 27-73 (2003).
- [2] T. Fukuda, *Remarks on Z_p -extensions of number fields*, Proc. Japan Acad. Ser. A 70 (1994) 264-266.

- [3] T. Fukuda and K. Komatsu, *On the Iwasawa λ -Invariant of the cyclotomic \mathbf{Z}_2 -extension of a real quadratic fields*, Tokyo J. Math. 28, No. 1 (2005) 259-264.
- [4] B. Ferrero and L. C. Washington, *The Iwasawa invariant μ_p vanishes for abelian number fields*, Ann. of Math., 109 (1979), 377-395.
- [5] R. Greenberg, *On the Iwasawa invariants of totally real number fields*, Amer. J. Math. 98 (1976) 263-284.
- [6] D. Gorenstein, *Finite Groups*, Harper and Row, new York, 1986.
- [7] K. Iwasawa, *On Z_l -extensions of algebraic number fields*, Ann. of Math. (2) 98 (1973), 246-326.
- [8] H. Kisilevsky, *Number fields with class number congruent to 4 mod 8 and Hilbert's theorem 94*, J. Number Theory 8 (1976) 271-279.
- [9] A. Mouhib and A. Movahhedi, *p -class tower of a Z_p -extension*, Tokyo Journal of Math. vol 31 (2008), 321- 332
- [10] T. Nguyen Quang Do, M. Lescop, *Iwasawa Descent and co-descent for units modulo circular units*, Pure and Applied Mathematics Quarterly. Volume 2, Number 2 (2006), 199-217.
- [11] Neukirch, Jürgen; Schmidt, Alexander; Wingberg Kay, *Cohomology of number fields*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental principles of Mathematical Sciences], 323. Springer-Verlag, Berlin, 2000.
- [12] M. Ozaki, H. Taya, *On the Iwasawa λ_2 -invariants of certain families of real quadratic fields*. Manuscripta Math. 94 (1997), no. 4, 437-444.
- [13] L. Rédei et H. Reichardt, *Die Anzahl der durch 4 teilbaren Invarianten der Klassengruppe eines beliebigen quadratischen Zahlkörpers*, J. Reine Angew. Math. 170 (1933), 69-74.

Ali MOUHIB
Univ de Fes, LMAO
Faculté polydisciplinaire de Taza
B.P 1223 Taza Gare
Maroc
Email: mouhibali@yahoo.fr